

# 无级变速器电液系统软件技术开发\*

周 丹<sup>1</sup>, 李泽容<sup>1</sup>, 贾舒媛<sup>1</sup>, 韩 玲<sup>2</sup>  
(1. 攀枝花大学机械工程学院, 四川 攀枝花 617000;  
2. 吉林大学交通学院, 吉林 长春 130022)

**摘要:** 针对 CVT 控制软件开发中, 进一步降低夹紧力及传统速比控制方案的缺点进行了研究。文中对金属带夹紧力安全系数控制法的弊端采用试验的方法测量了滑移率对传动效率的影响, 在试验过程中观察得到速比对夹紧力谐波输入跟踪的相位变化, 分析速比对夹紧力跟踪不同区段的相位差产生的原因后, 将两不同区段的交点作为夹紧力控制目标设计了夹紧力控制方案, 并在 ETAS 软件建模实现上述控制方案, 验证曲线表明该控制方案可以有效降低金属带夹紧力提高系统的传递效率。综合考虑系统对迅速改变速比的需求, 提出了改进的速比控制方案。经试验验证, 该方案可以消除通用 PID 算法的缺陷, 使变速机构在快速稳定的跟踪目标速比前提下, 确保了系统的流量安全和夹紧力安全。

**关键词:** CVT; 夹紧力控制分析; 速比控制; 系统建模

**中图分类号:** U479.2   **文献标志码:** A   **文章编号:** 0529-6579 (2014) 03-0029-07

## Key Kechnology for Continuously Variable Transmission Software Developing

ZHOU Dan<sup>1</sup>, LI Zerong<sup>1</sup>, JIA Shuhuan<sup>1</sup>, HAN Ling<sup>2</sup>

(1. College of Mechanical Engineering, Panzhihua University, Panzhihua 617000, China;  
2. College of Vehicle Operation Engineering, Jilin University, Changchun 130022, China)

**Abstract:** Benefit from the Phase transition point of ratio tracing the clamping force variation, one new clamping control concept is introduced, which can be obviously decrease the pressure level and the increase the efficiency. Comprehensively considered the requirement for rapidly ratio change, the pump ability and the flow, one updated proposal is raised up. Comparing with the traditional PID, this method is tested to proved not can only follow the target ratio fast and stable, but also more safe for the flow and clamping force.

**Key words:** CVT; clamping-force control analysis; speed-ratio control; modeling system

为提高系统的效率, 降低夹紧力, 文中根据不同的速比跟踪特性设计了夹紧力控制器。一些文献在 CVT 变速器内安装位移传感器, 无论是接触式还是非接触式, 其成本都非常高。因此, 在实际中使用是不现实的, 而且通过位移传感器跟踪几何速比, 无法准确检测到变形对几何速比的影响, 因此对滑移率的测量也是不准确的<sup>[1]</sup>。本文方案的优势在于, 不增加任何额外的信号采集设备, 仅仅通过软件算法来实现夹紧力的优化控制。

夹紧力控制和速比控制从来都是不可分离的, 两者之间具有耦合作用<sup>[2]</sup>。不同的目标速比控制方案会对车辆的经济性以及驾驶性能造成较大的影响。因此控制系统首先要根据车辆的运行工况确定目标速比和速比变化率, 然后实现速比的快速实时跟踪。然而在很多的研究文献中为了控制 CVT 速比使之快速回位, 对主动油缸夹紧力进行了过度控制导致的问题层出不穷<sup>[3-8]</sup>。① 为使得车辆停车之前速比回到最大速比, 制定了过高的速比变化

\* 收稿日期: 2013-10-29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (51075408)

作者简介: 周丹 (1976 年生), 女; 研究方向: 机械自动化; E-mail: yan-zou123@163.com

率, 因此在实际运行过程中出现了由于控制不当引起的金属带打滑现象。② 变速过程中, 其中一侧带轮快速充油, 而另外一侧则快速排油, 因此需要油泵提供足够大的流量。③ 速比跟踪的稳定性问题针对上述提出的弊端。文中基于上述问题提出了一种控制方法。在该方法中, 流量、转速、速比偏差、发动机扭矩等多个控制参数都被融入到了控制系统中。经对试验结果的观察对比上述提及问题都得到了有效解决。

## 1 夹紧力与极限扭矩传递能力计算

由金属环张紧力和金属片推力之间分布的基本方程 (1) 可知: 张紧力和推力积分得主动带轮和从动带轮上的轴向力 (2)

$$F_Z = \int \frac{(T(\theta) + Q(\theta) - Ce - Cr) d\theta}{2 \tan(11^\circ + \tan^{-1}(\mu \sin \zeta))} \quad (1)$$

$$F_p = \int_0^{\psi_1} \frac{(T(\theta) + Q(\theta) - Ce - Cr) d\theta}{2 \tan(11^\circ + \tan^{-1}(\mu \sin \zeta))} =$$

$$\frac{1}{2 \tan(11^\circ)} \int_0^{\beta_1} (T(\theta) + Q(\theta) - Ce - Cr) d\theta + \int_{\beta_1}^{\psi_1} (T(\theta) + Q(\theta) - Ce - Cr) d\theta \quad (2)$$

进而主动带轮轴向力  $F_p$  的方程表达式,

$$F_p = \frac{T_a}{2 \tan(11^\circ)} \cdot f_{F_p} \quad (3)$$

同理可确定从动带轮上轴向力  $F_s$  表达式,

$$F_s = \frac{T_a}{2 \tan \alpha} \cdot f_{F_s} \quad (4)$$

将滑移率定义为

$$s = \frac{i_s - i_g}{i_g} \times 100\% \quad (5)$$

式中,  $i_s$  为实际速比, 由转速计算得到;  $i_g$  为零输入扭矩工况的实际速比;  $s$  为滑移率;

当主动带轮侧所有的金属片都参与滑移和扭矩传递时, 则有  $\beta_p = \psi_p$ , 由公式 (3) - (5) 可知: 主动带轮的轴向力

$$F_p = \frac{T_a}{2 \tan \alpha \mu'_p} (\exp(\mu_{ap} \psi_p) - \exp(\mu_{ap} \beta_p - \mu'_p \beta_p)) \quad (6)$$

金属环张力

$$T_a = 2 \tan \alpha \frac{\mu'_p}{\exp(\mu_{ap} \psi_p) - \exp(\mu_{ap} \beta_p - \mu'_p \beta_p)} F_p \quad (7)$$

金属带扭矩传递能力可定义为

$$T_{P,s-\max} = \frac{2 F_{p,s}}{\cos \alpha} \cdot \mu_{p,s} \cdot R_{p,s} \quad (8)$$

(8) 式中  $R_{p,s}$  为主从动带轮上金属片摆梭作用半径;  $T_{P,s-\max}$  为主动或从动带轮上能够传递的极限扭矩;  $F_{p,s}$  为主从动带轮作用在金属带上有效轴向夹紧力;  $\alpha$  为金属带作用锥角  $11^\circ$ ;  $\mu_{p,s}$  为带轮工作面与金属片间的摩擦系数。

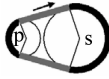
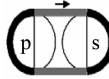
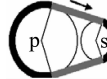
上述分析得到了金属带能够传递的极限扭矩  $T_{in-\max}$

$$\tau = \frac{T_{in}}{T_{in-\max}} \quad (9)$$

由于引进扭矩比概念, 因此在不同的扭矩比和速比条件下可计算主、从动带轮夹紧力比值, 得到主、从动带轮之间的夹紧力平衡关系 (表 1)。

表 1 一定输入条件下夹紧力平衡关系计算表

Table 1 The balance relation calculation for clamping force

输入条件: $T_{in} = 100 \text{ Nm}; \tau = 1/1.3;$		
		
$F_p/F_s = 1;$	$F_p/F_s = 1.18;$	$F_p/F_s = 1.8;$

该平衡关系可以作为后续夹紧力控制和速比控制的理论依据。

## 2 夹紧力控制策略开发

金属带的扭矩传递能力来自于带轮的工作表面与金属带之间的摩擦力, 这种摩擦传动方式需要在金属带和带轮之间施加足够的夹紧力。主动带轮总成和从动带轮总成上都设计有液压缸, 液压力推动可动带轮轴向移动, 并通过带轮将液压力作用在金属带上, 将金属带夹紧。在传统的夹紧力控制方法中, 根据当前发动机的扭矩计算出所需的金属带夹紧力:

$$F_{p,s} = \frac{\beta T_{p,s} \cos \alpha}{2 \mu R_{p,s}} \quad (10)$$

式中,  $T_{p,s}$  为作用在主动轴或从动轴上的扭矩;  $\alpha$  为带轮锥角,  $11^\circ$ ;  $\mu$  为带轮工作面与金属带之间的摩擦系数, 与油液的特性、速比及滑移率等参数相关;  $R_{p,s}$  为金属带工作节圆半径, 一般认为金属带与带轮工作面的接触弧为理想圆弧;  $\beta$  为夹紧力安全系数。

并在计算结果的基础上, 增加一定的安全系数, 将增加安全系数后的夹紧力作为控制的目标值, 以应对行车过程中来自发动机的扭矩波动以及来自道路的冲击负载, 这种策略就是安全系数法, 一般取安全系数 1.3。

但是，采用安全系数法控制夹紧力会导致施加在金属带上的夹紧力高于实际需求，由此带来的不良后果包括带轮和金属带工作应力的增加、液压油泵的泵油损失增大。而且为适应系统高压，轴承、变速机构结构设计、密封材料、液压管路等辅助零件的设计要求也要提高，从而导致制造成本的增加。但是，夹紧力低于实际需求，又会因扭矩传递能力不足导致金属带打滑，对带轮和金属带造成不可逆转的破坏。

由于夹紧力、速比及输入扭矩之间的相互耦合的作用，即在平衡状态改变其中的任何一个参数，金属带的工作半径都会随之发生移动。因此，开展金属带滑移测试时，一般将金属带的工作半径固定，将可动带轮通过机械方式稳定在某一位置，从而消除金属带工作半径变化给试验造成的影响。

在上节计算中可得到，夹紧力、速比以及输入扭矩之间的相互耦合的作用，即在平衡状态改变其中的任何一个参数，金属带的工作半径都会随之发生移动，因此，开展金属带滑移测试时，一般将金属带的工作半径固定，方法就是将可动带轮通过机械方式稳定在某一位置，从而消除金属带工作半径变化给试验造成的影响。

因此将金属带滑移率定义为

$$v = \omega_p r_p - \omega_s r_s \tag{11}$$

金属带相对滑移率为

$$s = \frac{v}{\omega_s r_s} \times 100\% = \frac{i_s - i_g}{i_g} \times 100\% \tag{12}$$

式中， $i_g$  为  $r_s/r_p$ ，输入扭矩为零时通过转速比值计算得到的速比； $i_s$  为  $\omega_p/\omega_s$ ，有输入扭矩作用时，通过转速比值计算得到的速比。

试验研究表明，金属带变速机构的传动效率受到滑移率的影响<sup>[9-11]</sup>。本文在试验台架上，对某国产无级变速器的带轮总成进行了测试，测试是在不同的温度下进行的，油温分别是 50，80 和 120 ℃，输入扭矩 80 N·m，输入转速 1 500 r/min。测试结果如图 1 所示，图中展示了最小速比状态下的滑移率与传动效率的测试曲线。

测试曲线表明，在不同测试温度下的三条传动效率-滑移率特性曲线的变化规律是一致的，即传动效率随着滑移率的增大逐渐提高，并在某一滑移率数值点达到峰值，然后快速下降。根据试验结果来看，如果能够找到使得传动效率最高的滑移率点作为滑移率控制目标，CVT 的效率损失和整车的燃油消耗都会大大降低。

在试验过程中，通过主动轴和从动轴转速计算

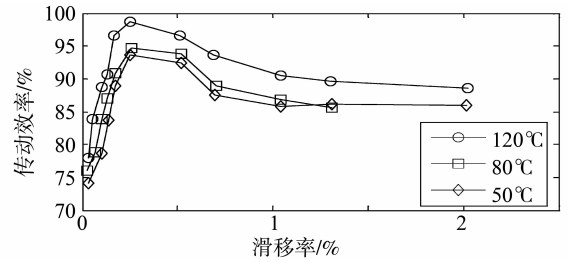


图 1 滑移率对传动效率的影响

Fig. 1 The sliding-rate influence the transmission efficiency

得到的速比  $i_s$  也随着夹紧力的变化而变化，变化趋势如图 2 所示。图中的曲线表明，当可动带轮被固定在最小速比状态时，从动油缸压力大于 1.25 MPa 时，速比  $i_s$  随着压力的降低而降低；而当从动油缸压力小于 1.25 MPa 时，速比  $i_s$  反而会随着压力的降低而增大。在分界点左右两侧截然不同的跟踪趋势表明，除了滑移率之外，一定还存在着其它的因素影响着速比对夹紧力的跟踪趋势。

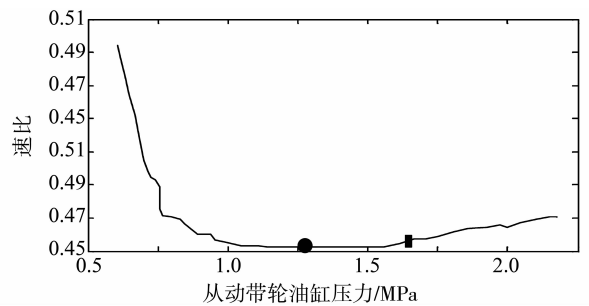


图 2  $i_s$  随从动油缸压力的变化曲线

Fig. 2  $i_s$  with the secondary cylinder pressure change curve

为将滑移率的影响和另外一个影响因素区分开来，作者又在空载试验台上进行了测试，由于主动轴的扭矩输入为零，因此扭矩对滑移率变化的影响可以被消除（由于金属带的传动机理及初始装配间隙导致的滑移率依然存在）。同样采用机械装置将带轮固定在最小速比状态，改变从动油缸压力，记录主动轴和从动轴的转速，并计算速比  $i_s$  的变化，其变化曲线如图 3 所示。图中曲线表明，在零扭矩输入下，速比  $i_s$  随着从动油缸压力的增加成上升趋势。经分析，这一变化趋势主要是由于压力增加导致的带轮、带轮轴以及壳体等零部件的变形引起的。

综合分析图 2 和图 3，图中影响速比  $i_s$  另外一个因素就变得清晰化了。当作用在金属带上的夹紧力相对于输入扭矩足够大时，零部件变形是导致速比  $i_s$  变化的主要因素。而夹紧力逐渐降低，当降低

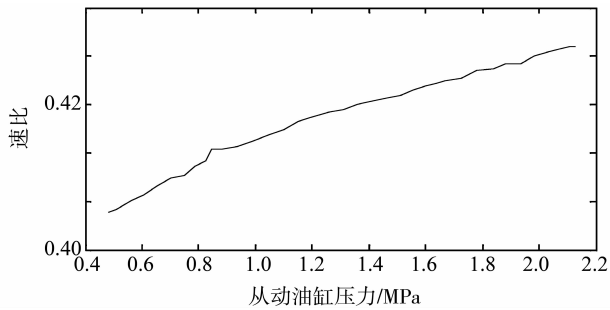


图 3 随从动油缸压力的变化  $i_s$  的变化趋势

Fig. 3  $i_s$  with the secondary cylinder pressure change curve

到一定程度时, 滑移率对速比  $i_s$  的变化趋势起主导作用。因此, 图中呈现了以 1.25 MPa 压力为分界点的跟踪趋势, 前后的相位相差 180°, 在分界点两种因素的彼此均衡, 且此时速比最小。而且该分界点与变速机构传动效率的最优点吻合。

在图 1 中用 □ 标注出传统安全系数控制法的目标夹紧力点, 同时用 ○ 标注出速比跟踪趋势的分界点。从图中可以看出, 如果将跟踪趋势的分界点作为夹紧力的控制目标, 那么作用在金属带上的夹紧力就可以有效降低, 传动效率也会相应提高。

在上述分析的基础上, 为将夹紧力控制在使传动效率最高的目标夹紧力附近, 优化系统传动效率, 本章设计了一种夹紧力控制器, 该控制器的理论依据就是速比对夹紧力谐波输入跟踪的相位差。

本节基于速比对夹紧力的跟踪特性设计了如图 4 所示的夹紧力控制策略, 该方法充分利用了 CVT 中必须的转速传感器和从动油缸压力传感器, 在不增加传感器的前提下, 通过对软件控制算法的设计来优化夹紧力控制。

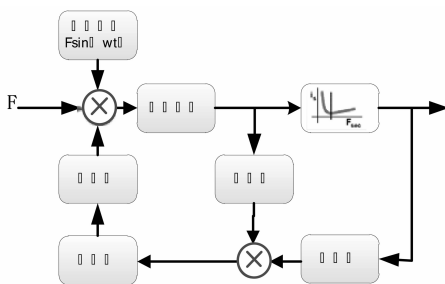


图 4 夹紧力控制算法

Fig. 4 Clamping force control calculation

图 4 中所示的夹紧力控制算法原理如下: 在根据安全系数法所确定的目标夹紧力的基础上, 叠加一个小幅正弦扰动信号, 并将叠加后的目标夹紧力作为控制目标, 并控制油缸压力使夹紧力跟踪

上述叠加后的目标值。

记录速比响应, 并对其进行滤波, 去除其低频变化趋势的信号, 观察其在正弦扰动信号激励下的响应。同时, 将从动油缸压力传感器采集到的信号进行滤波, 同样去除其低频变化趋势的信号, 观察在正弦扰动信号激励下的响应。将滤波后的压力信号和滤波后的速比信号相乘, 判断两者乘积的正负性。如果两者相乘为正值, 那么说明速比对夹紧力激励的响应特性为正向跟踪, 即证明此时的夹紧力足够, 高于图 2 中的最佳目标点, 仍然有下调的空间。如果两者相乘为负值, 那么说明速比对夹紧力激励的响应特性为正向跟踪, 即说明此时的夹紧力不足, 低于图 2 中的最佳目标点, 需要上调。

在 ETAS 软件中, 利用模块建模法实现上述控制算法, 并利用快速原型仿真设备进行整车试验, 记录试验过程中的压力、速比和效率曲线, 分别如图 5 和图 6 所示。

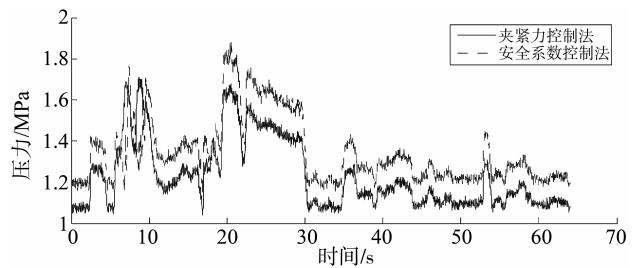


图 5 夹紧力对比

Fig. 5 compare with clamping force

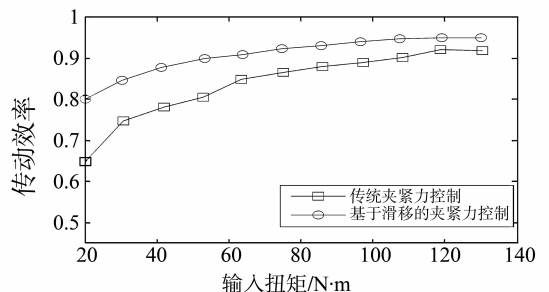


图 6 传动效率对比

Fig. 6 Compare with transmission efficiency

从图中可以看出, 夹紧力控制算法是对传统夹紧力控制算法的优化, 其降低了 CVT 系统损耗, 提高了燃油经济性, 并进行了汽车 FTP 工况循环油耗测试, 测试结果为百公里油耗 6.7 L/100 km, 比传统夹紧力油耗降低 2.9%。该控制算法有效降低了金属带夹紧力, 提高了系统的传动效率。

### 3 速比控制器设计

由于 CVT 的主动油缸压力控制阀一般被认为用来调节速比，因此又叫做速比控制阀。在很多的文献中采用了利用实际速比与目标速比之间的差值进行闭环速比控制的方法。另外也有很多的学者通过改进闭环控制算法获得了更好的速比跟踪效果，但实质上都是基于偏差量的控制方法。

本文所设计的液压系统，主动油缸压力控制阀和从动油缸压力控制阀都是压力控制阀，因此毫无疑问的速比控制方式为压力 - 压力控制，根据 IDE 公式计算变速机构的速比变化率：

$$\frac{di}{dt} = K_i n_{pri} (F_{pri} - F_{pri}^*) = K_i n_{pri} F_{sec} (F_{pri}/F_{sec} - F_{pri}^*/F_{sec}) \quad (13)$$

式中， $K_i$  为与速比唯一相关的系数，称为速比影响系数； $n_{pri}$  为主动轴转速； $F_{pri}$  为实际主动油缸压力； $F_{pri}^*$  为在 CVT 稳态下，即速比保持不变时，通过标定得到的数据；是使得速比保持不变的主动侧平衡夹紧力； $F_{sec}$  为从动轴侧金属带夹紧力。

根据 IDE 公式，要获得较大的速比变化率，可以通过增大发动机转速或者改变主动侧的金属带夹紧力。由于主动轴转速是无法主动改变的，而是通过对节气门和速比的控制来被动改变的，即主动轴转速是随着速比改变的因变参数。因此，控制系统如果要获得较大的速比变化率，往往是改变主动、从动的夹紧力比值。但是将速比偏差作为控制依据的话，就有可能导致夹紧力控制出现问题，如图 7 和图 8 所示。图中展示在紧急制动工况下，为了控制 CVT 速比使之快速回位，对主动油缸夹紧力进行了过度控制所导致的问题。

1) 为使得车辆停车之前速比回到最大速比，制定了过高的速比变化率，因此在实际运行过程中出现了由于控制不当引起的金属带打滑现象。

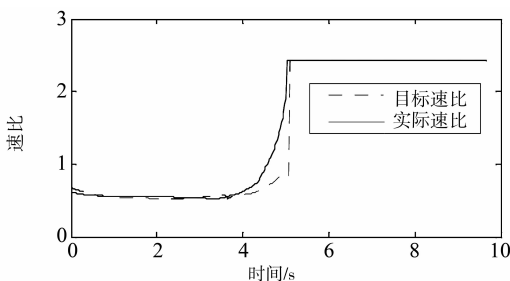


图 7 目标速比与实际速比对比

Fig. 7 Compare target speed-ratio with real speed-ration

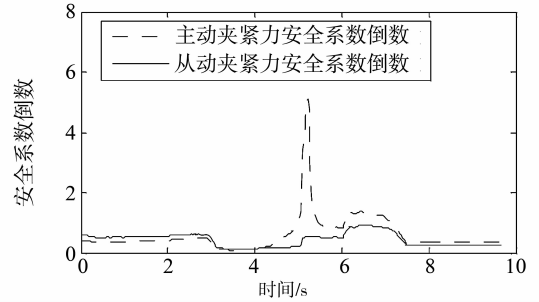


图 8 主从动夹紧力安全系数

Fig. 8 Safety factor for primary/secondary clamping force

对图中曲线进行分析，可以看出，紧急制动工况，由于速比变化率目标设定值较大，因此主动油缸的夹紧力需要大幅度降低以满足速比变化率需求，因此过低的夹紧力引起了夹紧力安全系数过低的问题，金属带出现打滑现象。

2) 变速过程中，其中一侧带轮快速充油，而另外一侧则快速排油，因此需要油泵提供足够大的流量。但是如果忽略了油泵供油能力有限的问题就会导致油泵的流量无法满足变速需求，从而出现系统压力降低，用于润滑和离合器控制的流量不足，甚至给系统造成破坏。

变速过程所需的系统流量可以通过下列公式计算：

$$Q_{pri} = A_p \cdot 2 \cdot \tan(11^\circ) \cdot \frac{dR_p}{di} \cdot \left| \frac{di}{dt} \right| \quad (14)$$

$$Q_{sec} = A_{sec} \cdot 2 \cdot \tan(11^\circ) \cdot \frac{dR_{sec}}{di} \cdot \left| \frac{di}{dt} \right| \quad (15)$$

如果  $\frac{di}{dt} > 0$ ，金属带和可动带轮向最大速比移动：

$$Q_{shift} = Q_{sec} ;$$

如果  $\frac{di}{dt} < 0$ ，金属带和可动带轮向最小速比

移动： $Q_{shift} = Q_{pri} - Q_{sec}$ 。

因此，变速过程需要油泵提供的总的流量为

$$Q_{shift-av} = Q_{pump} - Q_{leakage} - Q_{aux} - Q_{lub} \quad (16)$$

式中： $Q_{pump}$  为油泵提供的总流量； $Q_{leakage}$  为系统泄露流量； $Q_{aux}$  为对变速器 and 离合器进行操作所需的流量； $Q_{lub}$  为对零部件进行润滑所需流量。

从上述分析中可以看出，如果油泵提供的流量过多的消耗于变速过程，那么低压力回路的流量就会锐减，甚至为零。因此，对速比的控制必须要综合考虑油泵的供油能力及所有部件的流量需求，并在必要的情况请求发动机的主动配合控制来提高油泵的驱动转速，增加油泵的供油能力。

3) 速比跟踪的稳定性问题。

根据 IDE 速比变化率公式可知，速比变化率

与  $K_i$ ,  $n_{pri}$ , 及  $(F_{pri} - F_{pri}^*)$  相关, 因此对速比的控制要综合考虑上述因素的影响。即使速比偏差  $r_{error}$  和速比变化率偏差  $\dot{r}_{error}$  完全一致, 采用相同的 PID 参数在不同的工况下也会产生不同的控制效果。特别是在主动轴转速较高、车速较高的工况下, 速比对压力比值的变化更加敏感, 因此高速工况下容易产生由于控制不当引起的速比波动, 从而影响整车的稳定性能。还有些专家提出了将模糊控制和自适应理论应用到速比控制中, 但是标定量的增加将会使工程化的工作量大大增加。

针对上述提出的 1)、2)、3) 点弊端, 本文提出了一种控制方法, 如图 9 所示。

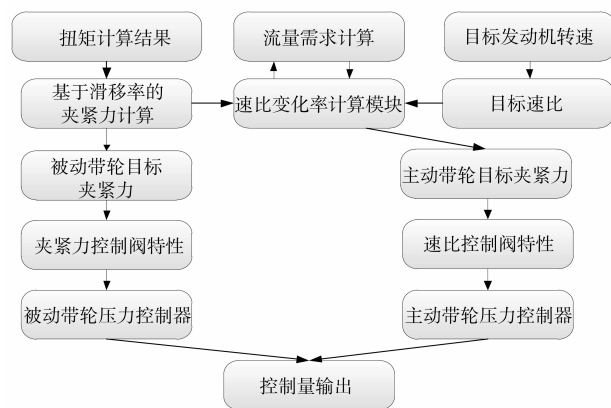


图 9 速比变化率控制流程

Fig. 9 Speed ratio change rate control process

经过对试验结果的观察对比, 上述提及问题都得到了有效的解决, 实车控制效果如图 10 和图 11 所示, 从图中可以看出在紧急制动和急加速两种工况下, 速比的跟踪效果较好。

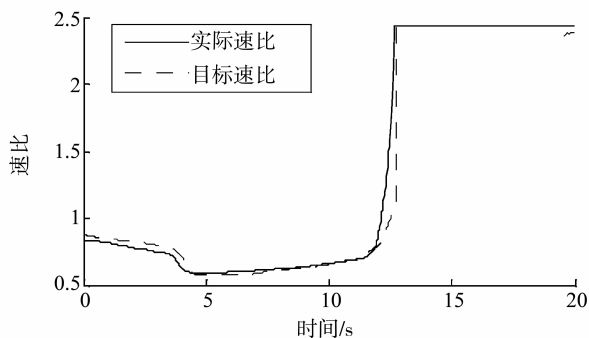


图 10 速比跟踪 (紧急制动)

Fig. 10 Speed ratio tracking

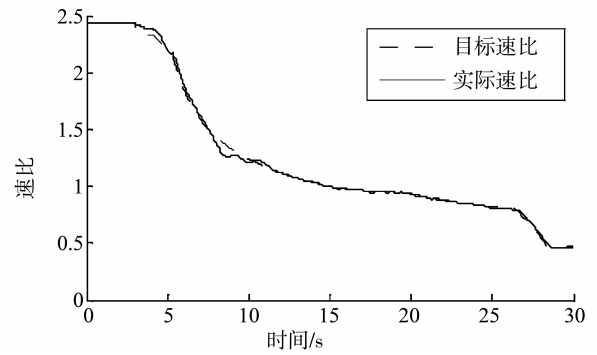


图 11 速比跟踪 (紧急加速)

Fig. 11 Speed ratio tracking

## 4 结论

本文提出了一种对传统 PID 速比控制器的改进方案, 进而降低夹紧力、提高传动效率且利用速比对夹紧力谐波输入的跟踪相位特征, 制定了夹紧力控制方案, 试验表明其可以有效降低夹紧力; 综合考虑系统对迅速改变速比的需求 (较高的速比变化率)、油泵的泵油能力、系统的流量需求等因素, 试验表明, 该方案在快速、稳定跟踪目标速比的前提下, 确保了系统的流量安全和夹紧力安全。在此基础上将开展电液控制模块测试和整车级别测试。

## 参考文献:

- [1] 罗勇. 金属带式无级变速传动系统匹配控制研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2010.
- [2] 张树培. 金属带式无级变速器耦合问题研究[D]. 长春: 吉林大学, 2011.
- [3] 张树培, 张友坤, 王庆年. 坡道行驶工况下 CVT 传动比控制[J]. 江苏大学学报: 自然科学版, 2010(3): 30 - 35.
- [4] EGGERT U, DIPL Ing. Control strategies for a chain drive CVT[M]. SAE Technical, 1984, doi:10.4271:841302.
- [5] LSHIZU T, SUDOU H, HINO A. Adaptive cruise control system using CVT gear ratio control[M]. SAE Technical 2001, doi:10.4271:3244.
- [6] KIM T, KIM H, YI J, et al. Ratio Control of Metal Belt CVT[M]. SAE Technical, 2000, doi:10.4271,1:0842.
- [7] VAN D N, VAN D S F, VAN D T. Innovative self-optimising clamping force strategy for the pushbelt CVT[J]. SAE Int J Engines, 2009 2(1): 1489 - 1498.

另一方面, 接下来我们证明函数  $u(x_1, x_2, z)$  满足输出辐射条件 (25)、(26) 和 (27)。由于函数  $u(x_1, x_2, z)$  有界, 并且由于函数  $f(x_1, x_2, z)$  和函数  $p(x_1, x_2, z)$  都满足假设条件 (A1) 和 (A2), 再根据引理 7 和引理 8, 我们立即可得到此结论。

#### 参考文献:

- [1] LIU L, QIN Y, XU Y, et al. A uniqueness and existence of solutions for the 3-D Helmholtz equation in a stratified medium with unbounded perturbation [J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2013, 36: 2033 – 2047.
- [2] XU Y. Scattering of acoustic waves by an obstacle in a stratified medium [J]. *Partial differential equations with real analysis*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 1992, 263: 147 – 168.
- [3] XU Y. Radiation condition and scattering problem for time-harmonic acoustic waves in a stratified medium with a non-stratified inhomogeneity [J]. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1995, 54: 9 – 29.
- [4] FINK Y, RIPIN D, FAN S, et al. Guiding optical light in air using an all-dielectric structure [J]. *Journal of Lightwave Technology*, 1999, 17: 2039 – 2041.
- [5] IBANESCU M, FINK Y, FAN S, et al. An all-dielectric coaxial waveguide [J]. *Science*, 2000, 289: 415 – 419.
- [6] ALEXANDROV O, CIRAOLO G. Wave propagation in a 3-D optical waveguide [J]. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2004, 14: 819 – 852.
- [7] ALEXANDROV O, CIRAOLO G. Wave propagation in a 3-D optical waveguide II: Numerical results [C]//*Proceedings of the 5th International Congress of the ISAAC held in Catania*, 2005.
- [8] CODDINGTON E A, LEVINSON N. *Theory of ordinary differential equations* [M]. New York: McGraw-Hill, 1955.
- [9] TITCHMARSH E C. *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations* [M]. Oxford: Oxford at the Clarendon Press, 1946.
- [10] ABRAMOWITZ M, STEGUN I A. *Handbook of mathematical functions* [M]. New York: Dover, 1972.
- [11] MAGNUS W, OBERHETTINGER F, SONI R. *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics* [M]. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1966.
- [12] CIRAOLO G. *Non-rectilinear waveguides: analytical and numerical results based on the Green's function* [D]. Ph D Thesis, <http://www.math.unipa.it/~g.ciraolo/>
- [13] ADAMS R, FOURIER J. *Sobolev spaces* [M]. New York: Academic Press, 2003.
- [14] GILBARG D, TRUDINGER N. *Elliptic partial differential equations of second order* [M]. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1977.
- [8] NISHIZAWA H, YAMAGUCHI H, SUZUKI H, et al. Friction characteristics analysis for clamping force setup in metal V-belt type CVT [M]. *SAE Technical*, 2005, doi: 10.4271/1462.
- [9] PULLES R. J, BONSEN B, STEINBUCH M, et al. Slip controller design and implementation in a continuously variable transmission [C]//*American Control Conference*, Portland, Oregon, 2005: 1756.
- [10] BONSEN B, KLAASSEN T W G L, VAN K G O. Measurement and control of slip in a continuously variable transmission [C]//*Mechatronics 2004*, Sydney, Australia, 2004.
- [11] 高帅. 无级变速器电液控制系统开发及关键技术研究 [D]. 长春: 吉林大学, 2012.

(上接第 34 页)